EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

***Varianta …*.029**

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex i.

(4p) **b)** Să se determine numărul real m astfel încât centrul de greutate al triunghiului cu vârfurile $A(2m,5)$, $B(m-2,7)$ și $C(-1,m)$ să se afle pe axa Ox.

(4p) **c)** Să se determine coordonatele punctelor de intersecție dintre cercul de ecuație $x^2+y^2=13$ și dreapta $3y+2x=0$.

(4p) **d)** Să se arate că punctele $L(-1,2)$, $M(-2,3)$ și $N(-3,4)$ sunt coliniare.

(2p) **e)** Să se calculeze distanța dintre punctele $A(-3,3)$ și $B(-1,1)$.

(2p) **f)** Să se determine partea reală a numărului complex $\frac{2-i}{3i+4}$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Să se calculeze suma $1+5+9+....+41$.

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un element din mulțimea $\{12,13,14,...,30\}$ să fie divizibil cu 7.

(3p) **c)** Să se determine numărul de funcții bijective care se pot defini pe mulțimea $\{2,4,6\}$, cu valori în mulțimea $\{2,4,6\}$.

(3p) **d)** Să se rezolve ecuația $C_n^2=45$, $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$.

(3p) **e)** Să se calculeze restul împărțirii polinomului X^3+3X-5 la polinomul $X+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f'(x)dx$.

(3p) **c)** Să se determine ecuația asimptotei spre ∞ la graficul funcției f.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

SUBIECTUL III (20p)

Pentru orice număr natural nenul n , se consideră mulțimea de numere raționale $H_n = \left\{ \frac{k}{n!} \middle| k \in \mathbf{Z} \right\}$.

(4p) **a)** Să se arate că dacă $x, y \in H_n$, atunci $x + y \in H_n$.

(4p) **b)** Să se verifice că dacă $x \in H_n$, atunci $-x \in H_n$.

(4p) **c)** Să se arate că dacă $n < p$, $n, p \in \mathbf{N}^*$ atunci $H_n \subset H_p$.

(2p) **d)** Să se arate că pentru orice număr rațional r , există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încât $r \in H_n$.

(2p) **e)** Să se arate că dacă $(G, +)$ este un subgrup al grupului $(\mathbf{Q}, +)$ şi $\frac{1}{n!} \in G$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci $H_n \subset G$.

(2p) **f)** Să se arate că dacă $A \subset \mathbf{N}^*$ este o submulțime infinită şi $(H, +)$ este un subgrup al grupului $(\mathbf{Q}, +)$ cu proprietatea că $\frac{1}{n!} \in H$, $\forall n \in A$, atunci $H = \mathbf{Q}$.

(2p) **g)** Să se demonstreze că, dacă $G_1, ..., G_{2007}$ sunt subgrupuri ale grupului $(\mathbf{Q}, +)$ şi $\mathbf{Q} = G_1 \cup ... \cup G_{2007}$, atunci există $i \in \{1, ..., 2007\}$ astfel încât $G_i = \mathbf{Q}$.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n$ şi funcțiile $f, F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + ... + a_n \sin nx \text{ şi } F(x) = -a_1 \cos x - \frac{a_2}{2} \cos 2x - ... - \frac{a_n}{n} \cos nx,$$

unde $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Notăm cu $S(p, q) = \int_0^{2\pi} \sin px \sin qx \, dx$, $\forall p, q \in \mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f pe $\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $F(x + 2k\pi) = F(x)$, $\forall k \in \mathbf{Z}$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

(4p) **c)** Utilizând rezultatul : "*Dacă o funcție* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *este periodică și monotonă, atunci funcția* g *este constantă* ", să se arate că dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, atunci funcția F este constantă .

(2p) **d)** Utilizând formula: $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$, să se arate că $S(p, q) = 0$, dacă $p \neq q$, $p, q \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $S(p, p) = \pi$, $\forall p \in \mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că dacă $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, atunci $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

(2p) **g)** Să se arate că dacă $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 0$, atunci $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.